מועד א', סמסטר אביב תשע"ד - 104016
17.7.14

פתרונות מלאים

מס. סטודנט: | | | | | | | | | פקולטה: | |

- משך המבחן : 3 שעות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- רשמו את כל תשובותיכם בדפים אלה. אפשר להשתמש בשני צידי הדף.
- בשאלות 1-4 יש **לנמק** היטב כל תשובה. תשובה לא מנומקת לא תחשב. בשאלות 5-8 יש לסמן את התשובה הנכונה. בכל שאלה יש רק סימון אחד נכון. שאלה שבה ישנם יותר סימונים מהמותר לא תיבדק. **אין לתת נימוקים בשאלות 5-8.** לא יינתנו נקודות על סימון שגוי.
- סך הנקודות במבחן הוא 101 אך הציון הסופי בקורס לא יעלה על 100.
- שאלת שיעורי הבית היא שאלה 4.

ב ה צ ל ח ה !

טבלה לסימון תשובות נכונות בשאלות 5-8:

	שאלה מס' 5	שאלה מס' 6	שאלה מס' 7	שאלה מס' 8
א.				
ב.				
ג.				
ד.				
ה.				

לבודקים: יש לרשום את הציונים בדף השער.

שאלה מס' 1 : (20 נקודות)

יהי $R^{2\times 2}$ מרחב המטריצות הממשיות מסדר 2×2 מעל R, ויהי $R_2[x]$ מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה ל- 2. תהי $T: R^{2\times 2} \to R_2[x]$ ההעתקה הלינארית המוגדרת ע"י:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b+3c)+(a-b+4c)x+(a-b+2c+d)x^2$$

א. (5 נק') מצאו בסיס ומימד לגרעין של T.

ב. (5 נק') הוכיחו שאם $A\in Ker(T)$ אז גם $A^2 \in Ker(T)$.

ג. (5 נק') מצאו בסיס לתמונה של T כך שבכל פולינום בבסיס זה המקדם של x הוא 5.

ד. (5 נק') האם קיימת העתקה ליניארית $S: R_2[x] \to R^{2\times 2}$ כך ש $S\circ T: R^{2\times 2} \to R^{2\times 2}$ היא העתקה על? אם כן, הביאו דוגמא להעתקה S כזו, אם לא קיימת נמקו מדוע.

פתרון שאלה מס' 1:

א. גרעין: נפתור $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b+3c)+(a-b+4c)x+(a-b+2c+d)x^2 = 0$$

$$\begin{cases} a-b+3c=0 \\ a-b+4c=0 \\ a-b+2c+d=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a-b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow \ker T = \left\{\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} a\in R\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ פורשת את $\mathrm{Ker}T$ ובלתי תלויה ליניארית לכן מהווה בסיס לגרעין של T ומתקיים $\dim KerT = 1$.

ב. נתון $A\in Ker(T)$ לכן $A=\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a^2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} = KerT$$

ג. תחילה נמצא בסיס כלשהו לתמונה. לפי משפט המימדים השני מתקיים:

$$\dim \operatorname{Im} T = \dim R^{2\times 2} - \dim KerT = 4-1=3=\dim R_2\left[x\right]$$

קיבלנו כי T היא על ולכן כל בסיס של $R_2\left[x\right]$ הוא בסיס של $\operatorname{Im} T$. מאחר $\dim R_2\left[x\right]=3$ כל 3 פולינומים בת"ל יהוו בסיס, לכן נבחר 3 בת"ל כך שבכל אחד מהם המקדם של x שווה ל- 5 כנדרש, למשל: $\left\{1+5x\ ,\ 5x+x^2\ ,\ 5x+2x^2\right\}$. לא קשה להשתכנע כי אכן 3 הפולינומים הנ"ל הם בת"ל.

ד. נראה כי S כזו לא קיימת.

אם קיימת S כך ש- $S\circ T$ על, הרי שאז $\dim \operatorname{Im}(S\circ T)=\dim R^{2\times 2}=4$. נראה שזה לא יתכן.

נבחין כי $S: R_2\left[x\right]\to R^{2\times 2}$ לכן לפי משפט המימדים השני מתקיים:

$$\dim \operatorname{Im} S = \dim R_2\left[x\right] - \dim KerS = 3-\dim KerS \le 3$$

עתה נראה כי $\operatorname{Im}\left(S\circ T\right)\subset \operatorname{Im} S$: יהי $v\in \operatorname{Im}\left(S\circ T\right)$, אז קיים $u\in R^{2\times 2}$ כך ש: $S\circ T(u)=v$ או $S\left(T(u)\right)=v$. נסמן $T(u)=w$ אז $S\left(T(u)\right)=S\left(w\right)=v$ כלומר $S\left(w\right)=v$ לכן $v\in \operatorname{Im} S$ והוכחנו כי $\operatorname{Im}\left(S\circ T\right)\subset \operatorname{Im} S$ ובפרט מתקיים: $\dim \operatorname{Im}\left(S\circ T\right)\le \dim \operatorname{Im} S\le 3<4$ ולכן $S\circ T$ לא על.

שאלה מס' 2 : (30 נקודות)

יהי $T: R_2[x] \to R_2[x]$ האופרטור הלינארי המוגדר ע"י :

$$T(a+bx+cx^2) = (8a-2b-2c)+(3a+b-6c)x+(a-2b+5c)x^2$$

ויהי E הבסיס הסדור הסטנדרטי של $R_2[x]$: $E = \{1\ ,\ x\ ,\ x^2\}$.

א. (5 נק') מצאו את $[T]_E$, המטריצה המייצגת את T לפי הבסיס E.

ב. (5 נק') מצאו את הפולינום האופייני של T.

ג. (5 נק') מצאו את כל הערכים העצמיים של T, וכן את הריבוי האלגברי והריבוי הגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ד. (9 נק') האם קיים בסיס B של $R_2[x]$ כך ש $[T]_B$ (המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס B) היא אלכסונית? אם כן, מצאו בסיס B כזה וכן מצאו את $[T]_B$. אם לא קיים בסיס כזה, נמקו מדוע.

ה. (6 נק') נתון שקיים בסיס C של $R_2[x]$ כך ש $[T]_C = \begin{pmatrix} 7 & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$. מצאו את $\alpha\ ,\ \beta\ ,\ \gamma$.

פתרון שאלה מס' 2 :

א. מאחר והבסיס הוא סטנדרטי, הרי ש :

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -6 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

ב. פולינום אופייני של T הוא הפולינום האופייני של איזושהי מטריצה מייצגת של T לכן :

$$\left|\lambda I - [T]_E\right| = \begin{vmatrix} \lambda-8 & 2 & 2 \\ -3 & \lambda-1 & 6 \\ -1 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} \underset{C_2 \to C_2 - C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda-8 & 0 & 2 \\ -3 & \lambda-7 & 6 \\ -1 & 7-\lambda & \lambda-5 \end{vmatrix} \underset{R_3 \to R_3 + R_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda-8 & 0 & 2 \\ -3 & \lambda-7 & 6 \\ -4 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-7)\begin{vmatrix} \lambda-8 & 2 \\ -4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-7)\left[(\lambda-8)(\lambda+1)+8\right] = (\lambda-7)(\lambda^2-7\lambda) = \lambda(\lambda-7)^2$$

קיבלנו שהפולינום האופייני של T הוא : $f(\lambda) = \lambda(\lambda-7)^2$.

ג+ד. ערכים עצמיים וריבוי אלגברי :

$\lambda_1 = 7$ מריבוי אלגברי 2

$\lambda_2 = 0$ מריבוי אלגברי 1 ולכן גם ריבוי גיאומטרי 1.

נמצא בסיס לכל מרחב עצמי :

$\lambda_1 = 7$: יש לפתור $\left(7I - [T]_E\right)\bar{x} = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -a+2b+2c=0 \Rightarrow a=2b+2c$$

$$V_{\lambda_1=7}\left\{(2b+2c)+bx+cx^2 \mid b,c\in R\right\} = span\left\{2+x\ ,\ 2+x^2\right\}$$

הקבוצה $\left\{2+x\ ,\ 2+x^2\right\}$ פורשת את המרחב העצמי של $\lambda_1=7$ והיא גם בת"ל (פולינומים ממעלות שונות) ולכן מהווה בסיס למרחב העצמי של $\lambda_1=7$. בפרט, הריבוי הגיאומטרי של $\lambda_1=7$ הוא 2.

$\lambda_2=0$: יש לפתור $\left(0I-[T]_E\right)\bar{x}=0$ או $[T]_E\,\bar{x}=0$:

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -6 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -6 \\ 8 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & -21 \\ 0 & 14 & -42 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a-c=0 \\ b-3c=0 \end{cases} \Rightarrow (a,b,c)=(c,3c,c)$$

$$V_{\lambda_2=0}=\left\{c+3cx+cx^2 \mid c\in R\right\} = span\left\{1+3x+x^2\right\}$$

הקבוצה $\left\{1+3x+x^2\right\}$ פורשת את המרחב העצמי של $\lambda_2=0$ והיא גם בת"ל ולכן מהווה בסיס למרחב העצמי של $\lambda_2=0$, בפרט, הריבוי הגיאומטרי של $\lambda_2=0$ הוא 1.

קיבלנו כי לכל ערך עצמי מתקיים שריבוי אלגברי שווה לריבוי גיאומטרי ולכן T לכסין כלומר קיים בסיס B של $R_2[x]$ כך ש $[T]_B$ היא אלכסונית. הבסיס B מורכב כולו מווקטורים עצמיים של T וכן המטריצה $[T]_B$ היא אלכסונית שבאלכסון שלה הערכים העצמיים של T בהתאמה:

$$B=\left\{2+x\ ,\ 2+x^2\ ,\ 1+3x+x^2\right\}\ ,\ [T]_B=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ה. מטריצות מייצגות את אותה העתקה אם"ם הן דומות. מהנתון שהבסיס C קיים נובע שהמטריצה $[T]_C$ דומה למטריצה $[T]_B$.

למטריצות דומות יש אותה עקבה ולכן בהכרח: $trace\left([T]_B\right)=14=trace\left([T]_C\right)=7+\beta+0$

ולכן: $\beta=7$ ונקבל: $[T]_C=\begin{pmatrix} 7 & \alpha & 0 \\ 0 & 7 & \gamma \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$. בנוסף למטריצות דומות יש אותה דטרמיננטה ולכן:

$$\det\left([T]_C\right)=0=\det\left([T]_B\right)=\det\begin{pmatrix} 7 & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}=7\cdot(\beta\cdot 0-\gamma^2)$$

$$-7\gamma^2=0 \Rightarrow \gamma=0$$

ונקבל: $[T]_C = \begin{pmatrix} 7 & \alpha & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. מאחר וגם $[T]_C$ לכסינה הרי שהריבוי הגיאומטרי של 7 צריך להיות שווה ל- 2 כלומר צריך להתקיים: $3 - rank\left(7I - [T]_C\right) = 2$ או $rank\left(7I - [T]_C\right) = 1$. מאחר ו-

$$7I - [T]_C = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

כדי שהדרגה תהייה 1 בהכרח צריך להתקיים: $\alpha = 0$.

לסיכום: $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 7$.

שאלה מס' 3 : (21 נקודות)

הוכיחו את הטענות הבאות:

א. (7 נק') יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. נתון כי $\dim V = n$ כאשר $n \geq 2$ טבעי, וכן ש- U , W הם תת מרחבים לא טריוויאליים של V (כלומר U , W שונים מ- V ושונים ממרחב ה- 0) המקיימים $\dim(U \cap W) = n-1$ אז $U = W$.

ב. (7 נק') תהי A מטריצה ריבועית מעל שדה F. אם $v \in F^n$ הוא וקטור עצמי של A, אז v הוא וקטור עצמי של A^2. מצאו גם את הערך העצמי המתאים.

ג. (7 נק') יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל R. יהיו $u, w \in V$ כך ש $\|u\| = \|w\| = 1$ ויהי $\alpha \in R$. אז הווקטורים $u + \alpha w$ ו- $u - \alpha w$ אורתוגונליים אם"ם $\alpha^2 = 1$.

פתרון שאלה מס' 3:

א. מאחר ו- $U \cap W \subset U$ הרי ש- $n-1 = \dim(U \cap W) \leq \dim U$. בנוסף נתון כי U תת מרחב של V השונה מ- V ולכן $\dim U < \dim V = n$ מכאן כי $n-1 \leq \dim U < n$ ולכן $\dim U = n-1$. קיבלנו כי $U \cap W \subset U$ ומאותו מימד ולכן $U = U \cap W$. באותו אופן בדיוק (כי הנתונים זהים) נקבל כי $W = U \cap W$ ולכן $U = W$.

ב. נתון כי $v \in F^n$ הוא וקטור עצמי של A כלומר $v \neq 0$ וקיים $\lambda \in F$ כך ש $Av = \lambda v$. מאחר ו- $v \neq 0$, צריך עוד להוכיח כי קיים $\mu \in F$ כך ש $A^2 v = \mu v$. נחשב $A^2 v$:

$$A^2 v = AAv = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda(Av) = \lambda\lambda v = \lambda^2 v$$

קיבלנו כי v הוא וקטור עצמי של A^2 עם ערך עצמי $\mu = \lambda^2$.

ג. נתון $\|u\| = \|w\| = 1$ וצריך להוכיח $\langle u - \alpha w , u + \alpha w \rangle = 0$ אם"ם $\alpha^2 = 1$.

תחילה נפתח את $\langle u - \alpha w , u + \alpha w \rangle$ ונזכור שמאחר ואנו מעל R לצמוד אין משמעות כלומר מתקיים: $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} = \langle v, u \rangle$ וכן $\bar{\alpha} = \alpha$.

$$\langle u - \alpha w , u + \alpha w \rangle = \langle u , u + \alpha w \rangle - \alpha \langle w , u + \alpha w \rangle = \langle u , u \rangle + \alpha \langle u , w \rangle - \alpha \langle w , u \rangle - \alpha\bar{\alpha} \langle w , w \rangle =$$
$$\|u\|^2 - \alpha^2 \|w\|^2 + \alpha \langle u , w \rangle - \alpha \langle u , w \rangle = 1 - \alpha^2$$

קיבלנו $\langle u - \alpha w , u + \alpha w \rangle = 1 - \alpha^2$ ולכן $\langle u - \alpha w , u + \alpha w \rangle = 0$ אם"ם $1 - \alpha^2 = 0$ או אם"ם

$$1 = \alpha^2$$

<u>שאלה מס' 4</u> : (10 נקודות) שאלת שיעורי בית

הוכיחו את הטענות הבאות:

א. (5 נק') אם A ממשית מטריצה לא ריבועית אז לפחות אחת מתוך שתי המטריצות AA^t ו- A^tA לא הפיכה.

ב. (5 נק') אם B,C הן שתי מטריצות ממשיות מסדר 5×5 המקיימות $BC+CB=0$ אז לפחות אחת מתוך שתי המטריצות B ו- C לא הפיכה.

<u>פתרון שאלה מס' 4</u>:

א. נתון A מטריצה מסדר $m\times n$ וממשית. מאחר והמטריצה לא ריבועית הרי ש- $m\neq n$.

נניח כי $m<n$ לפי משפט מתקיים $rank(A)\le \min\{m\ ,\ n\}=m$. נסתכל על המטריצה A^tA. זו מטריצה מסדר $n\times n$, לפי משפט מתקיים:

$$rank(A^tA)\le \min\{rank(A)\ ,\ rank(A^t)\}\underset{rank(A)=rank(A^t)}{=}rank(A)\le m<n$$

קיבלנו כי A^tA היא מטריצה מסדר $n\times n$ ומדרגה קטנה ממש מ- n ולכן היא לא הפיכה.

באותו אופן, אם נניח כי $m>n$ אז AA^t היא מטריצה מסדר $m\times m$ ומדרגה קטנה ממש מ- m ולכן היא לא הפיכה.

ב. כאן המטריצות ריבועיות לכן נעזר בדטרמיננטה. נתון $BC+CB=0$ או $BC=-CB$. נחשב דטרמיננטה לשני האגפים:

$$|BC|=|-CB|=(-1)^5|CB|=-|CB|$$

אבל המטריצות ריבועיות ולכן $|BC|=|CB|$. נציב ונקבל:

$$|BC|=-|CB|=-|BC|$$
$$2|BC|=0$$
$$|BC|=0$$
$$|B||C|=0$$

לכן $|B|=0$ כלומר B לא הפיכה או $|C|=0$ כלומר C לא הפיכה.

בשאלות 8-5 יש לסמן את התשובה הנכונה בטבלה (בכל שאלה רק תשובה אחת)
שימו לב כי במבחן היו טורים לכן יש לבדוק על פי תוכן הסעיף ולא על פי מספרו.

שאלה מס' 5 : (5 נקודות)

נתון:

A מטריצה ממשית מסדר 5×5 ;

$u,v,w\in R^5$ הם שלושה וקטורי עמודה ;

W = מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $A\overline{x}=0$.

אזי:

א. אם u,v,w הם 3 עמודות בלתי תלויות ליניארית של A אז $\dim W=2$.

ב. אם $rank(A)=3$ ו- $W=span\{u,v,w\}$ אז u,v,w תלויים ליניארית.

ג. אם $rank(A)=2$ ו- u,v,w בלתי תלויים ליניארית אז $W=span\{u,v,w\}$.

ד. אם $W=span\{u,v,w\}$ אז $rank(A)=2$.

ה. אם $rank(A)=2$ אז $W=span\{u,v,w\}$.

פתרון שאלה מס' 5 :

א. **לא נכון.** מהנתון נובע כי $rank(A^t)=rank(A)\geq3$ ולכן המימד של W קטן או שווה ל- 2.

ב. **נכון.** מהנתון הדרגה של A היא 3 ולכן מימד W הוא $5-3=2$. אבל נתון ש $W=span\{u,v,w\}$ ולכן בהכרח הקבוצה הפורשת תלויה ליניארית כלומר u,v,w תלויים ליניארית.

ג. **לא נכון.** אומנם אם הדרגה של A היא 2 אז אכן מימד W הוא 3 אבל שלושת הווקטורים הנתונים הם לא בהכרח בסיס ל- W.

ד. **לא נכון.** יתכן והוקטורים u,v,w תלויים ליניארית ואז המימד של W הוא 2 או פחות כלומר הדרגה של A היא 3 או יותר.

ה. **לא נכון.** הדרגה של A היא 2 פרושו שמימד W הוא 3 אבל u,v,w הנתונים לא בהכרח ב- W. ומה עוד שלא נתון שהם בלתי תלויים לינארית.

שאלה מס' 6: (5 נקודות)

יהי $V = R^4$ ויהיו U ו- W תת מרחבים של V. נתון כי:

(i) $\dim U = 3$.

(ii) $(1,0,0,0) \in W$.

(iii) $U \cap W = span\{(1,1,1,1)\ ,\ (2,2,1,-1)\ ,\ (0,0,1,3)\}$.

אזי:

א. $\dim W = 2$.

ב. $R^4 = U \oplus W$.

ג. $\dim(U+W) = 4$.

ד. $U \cap W = U$.

ה. $U \cap W = W$.

פתרון שאלה מס' 6:

תחילה נמצא בסיס ל- $U \cap W$ ע"י דרוג הקבוצה הפורשת.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו כי בסיס לחיתוך הוא $\{(1,1,1,1)\ ,\ (0,0,1,3)\}$ ו- $\dim(U \cap W) = 2$.

א. **לא נכון.** נתון (ii) הוא $(1,0,0,0) \in W$ אבל $(1,0,0,0) \notin U \cap W$ ולכן $U \cap W$ הוא תת מרחב ממש של W כלומר $\dim W > \dim(U \cap W) = 2$.

ב. **לא נכון.** מימד החיתוך שונה מ- 0 כך שהסכום של U ו- W הוא לא סכום ישר, בין אם הוא כל R^4 ובין אם לא.

ג. **נכון.** מההסבר של סעיף א' נקבל ש- $\dim W = 3$ או $\dim W = 4$. נחשב לפי משפט המימדים הראשון את המימד של $U+W$ בשני המקרים. נזכור גם כי $U+W$ הוא תת מרחב של R^4 ולכן מימדו לכל היותר 4. מקרה ראשון: $\dim W = 4$

$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 3+4-2 = 5$ וקיבלנו סתירה לכן:

$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 3+3-2 = 4$.

ד. **לא נכון.** הם לא מאותו מימד ובפרט לא שווים.

ה. **לא נכון.** הם לא מאותו מימד ובפרט לא שווים.

שאלה מס' 7 : (5 נקודות)

נתונה המטריצה המרוכבת הבאה :

$$B=\begin{pmatrix} 2-3i & 1+i & 0 \\ 2 & i & 0 \\ 7i & -5 & 2i \end{pmatrix}$$

כן נתונה מטריצה $A\in C^{3\times 3}$ הפיכה המקיימת : $A^3B^2A^{-1}=-2iB^3\left(AB\right)^{\mathrm{t}}$, אז $\det(A)$ שווה ל :

א. $-32i$; ב. $-16i$; ג. $-2i$; ד. $8i$; ה. $64i$

פתרון שאלה מס' 7 :

תחילה נחשב את הדטרמיננטה של B :

$$|B|=\begin{vmatrix} 2-3i & 1+i & 0 \\ 2 & i & 0 \\ 7i & -5 & 2i \end{vmatrix}=2i\begin{vmatrix} 2-3i & 1+i \\ 2 & i \end{vmatrix}=2i\left[(2-3i)i-2(1+i)\right]=2i(2i+3-2-2i)=2i$$

עתה נחשב דטרמיננטה לשני אגפי הנתון. נעזר בחוקי דטרמיננטים ובכך ש Aהפיכה ולכן $|A|\neq 0$:

$$\left|A^3B^2A^{-1}\right|=\left|-2iB^3\left(AB\right)^{\mathrm{t}}\right|=\left|-2iB^3B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}\right|$$
$$\left|A^3\right|\left|B^2\right|\left|A^{-1}\right|=(-2i)^3\left|B^3\right|\left|B^{\mathrm{t}}\right|\left|A^{\mathrm{t}}\right|$$
$$|A|^3|B|^2|A|^{-1}=-8i^3\left|B^3\right||B||A|=-8(-i)|B|^4|A|=8i|B|^4|A|$$
$$|A|^3|A|^{-1}=8i|B|^2|A|$$
$$|A|^2=8i(2i)^2|A|$$
$$|A|=8i(-4)=-32i$$

לכן $|A|=-32i$

שאלה מס' 8 : (5 נקודות)

יהי $V=R^{2\times 2}$ ויהיו E ו- B שני הבסיסים הסדורים הבאים של V :

$$E=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$
$$B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

תהי P מטריצת המעבר מהבסיס B לבסיס E (כלומר המטריצה P המקיימת $P\left[v\right]_E=\left[v\right]_B$).

אז $\left(P\right)_{4,3}$, האיבר בשורה 4 ועמודה 3 של P, שווה ל :

א. $\frac{1}{4}$; ב. $-\frac{1}{2}$; ג. -1 ; ד. 1 ; ה. 0

<u>פתרון שאלה מס' 8</u>:

P מטריצת המעבר מהבסיס B לבסיס E לכן לקבלת עמודות P יש לכתוב את איברי E באמצעות איברי B. האיבר בשורה 4 ועמודה 3 של P מתקבל מכתיבת האיבר השלישי של E כצרוף לינארי של איברי B לכן נחשב רק צרוף לינארי זה. ניתן לראות כי:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

מאחר והמקדמים מהווים את העמודה השלישית הרי שבשורה הרביעית ימצא $-\frac{1}{2}$,

כלומר $(P)_{4,3} = -\frac{1}{2}$.